შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა N

22.04.2012/ მათ/ II/ 110

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad x, y\in\mathbb{R}$ $\quad f(x+yf(x)) = f(f(x)) + xf(y)$

1) ცხადია, რომ მოცემულ პირობას დააკმაყოფილებს ფუნქცია $f(x)=c$ სადაც c ნებისმიერი რიცხვია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლიდან

ე.ი. $f(x)=c$, სადაც $c\in\mathbb{R}$

2) თუ $x=0$ ჩავსვამთ ფორმულაში $\Rightarrow$ $f(yf(0)) = f(f(0))$ სადაც y ნებისმიერი რიცხვია $y\in\mathbb{R}$ რადგან f ფუნქციის ასახვის რიცხვი, რომელიც შეესაბამება $f(0)$-ზე y ყოველთვის ერთი და იგივე მნიშვნელობის, რადგან $f(0)$-ს რომ ჩავსვამთ f-ში, ამიტომ გამომდინარე $yf(0) = f(0)$ y ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია

$(y-1)\cdot f(0)=0$ ამიტომ ამ შემთხვევაში ჩანს, რომ $f(0)=0$

ახლა თუ $y=0$ ჩავსვამ ამ მოცემულ ფორმულაში.

$f(x+0\cdot f(x)) = f(f(x)) + x\cdot f(0)$ ე.ი. $f(x) = f(f(x)) + f(0)\cdot x$

წინა შემთხვევაში ვნახეთ რომ $f(0)=0$ ე.ი. ორივე ვარიანტი ყველა ისეთი ფუნქცია, რომელიც ამ ტიპისაა $f(x) = f(f(x))$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა N

22.04.2012/ მათ/ II/ 110

ამოცანა № 4

გვერდი № 2

ცხადია რომ [illegible] ფუნქცია რომელიც [illegible] [illegible] · [illegible] [illegible]

$f(x)=kx+b$ [illegible] $f(f(x)) = k(kx+b)+b = k^2x+k(b+1)$

და $\begin{cases} k^2=k \Rightarrow k=0 \quad k=1 \\ k(b+1)=b \end{cases}$

1) თუ $k=1 \Rightarrow$ ~~$b+1=$~~ [illegible] მაშინ $f(x)=x$

2) თუ $k=0$ ფუნქცია მუდმივი [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] და $f(x)=C$

პასუხი: $f(x)=C$ სადაც $C \in \mathbb{R}$ და $f(x)=x$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

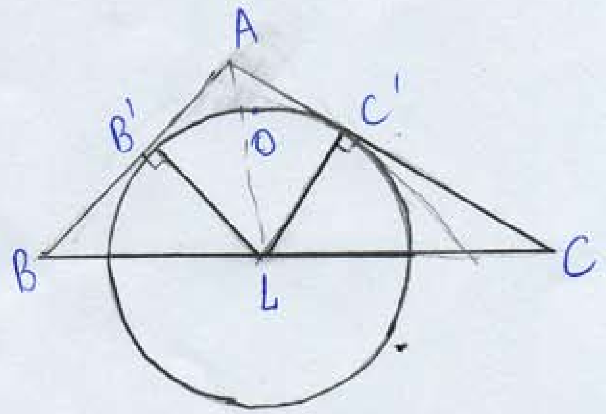
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა N

22.04.2012/ მათ/ II/ 110

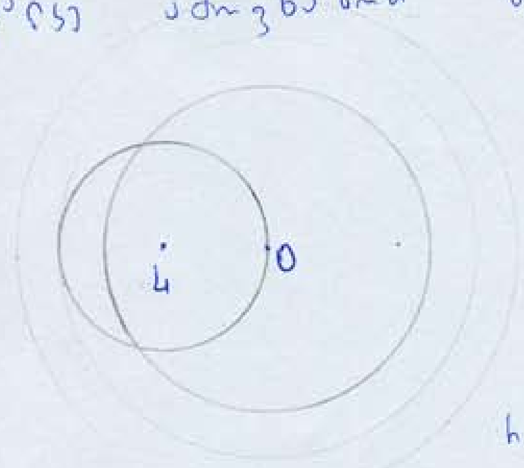
ამოცანა № 5

გვერდი № 3



O არის △ABC-ზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი

ცალკე ამოვხსნათ ω წრეწირი



O არის მეორე წრეწირის ცენტრი 1) თუ ამ მეორე წრეწირის რადიუსი მეტი იქნება ω-ს რადიუსზე 2ჯერ ეს წრეწირები საერთოდ არ გადაკვეთენ ერთმანეთს 2) თუ ამ მეორე წრეწირის რადიუსი ω-ს დიამეტრის ტოლია, მაშინ ეხებიან ერთ საერთო შეხების წერტილში 3) ხოლო თუ ω-ს დიამეტრზე ნაკლებია, ეხებიან(?) გადაკვეთენ ორ წერტილში. ეს უნდა ვაჩვენოთ.

რომ $R_1 < 2R$ R - ω-ს რადიუსი R_1 - △ABC-ზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი. $B'L = LC' = OL = R$

$B'L \perp AB$
$LC' \perp AC$ (შეხების წერტილში გავლებული რადიუსები)

$AB = c$ $AC = b$ $BC = a$

მოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 110

ამოცანა № 5

გვერდი № 4

$S_{\triangle ABL} = \frac{1}{2} \cdot B'L \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot R \cdot c$; ხოლო $S_{\triangle ALC} = \frac{1}{2} \cdot LC' \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot R \cdot b$

$S_{\triangle BAL} + S_{\triangle ALC} = S_{\triangle ABC} = S$ ე.ი. $\frac{1}{2} Rc + \frac{1}{2} Rb = S \Rightarrow R = \frac{2S}{b+c}$ და

$R_1 = \frac{abc}{4S}$ ვაჩვენოთ, რომ $R_1 < 2R$ ე.ი. $\Delta = R_1 - 2R = \frac{abc}{4S} - \frac{4S}{b+c} =$

$= \frac{abc(b+c) - 16S^2}{4S(b+c)}$ $4S(b+c) > 0$ ე.ი. საკმარისია მხოლოდ მრიცხველის შესწავლა ანუ

$S = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2} \Rightarrow 16S^2 = 4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2$

$\Delta = abc(b+c) - 4a^2b^2 + (a^2+b^2-c^2)^2 = 4a^2b^2\left(\frac{c(b+c)}{4ab} - 1 + \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2\right)$

$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \Rightarrow \cos^2\alpha \in (0;1)$ საკმარისია ის ვაჩვენოთ $\Delta_1 = \frac{c(b+c)}{4ab} - 1$

და გამოვიყენოთ რომ $c < a+b$ (სამ-ის უტოლობა) $\Delta_1 < \frac{(a+b)(b+c)}{4ab} - 1 = \frac{(a+b)(b+c) - 4ab}{4ab}$

გამოვიყენოთ ისიც რომ $2ab < (a+b)^2$ ე.ი. $\Delta_1 < \frac{(a+b)(b+c) - 2(a+b)^2}{4ab} = \frac{(a+b)(b+c-2a-2b)}{4ab} =$

$= \frac{(a+b)(c-2a-b)}{4ab}$ და $\frac{a+b}{4ab} > 0$ $c < a+b$ ე.ი. $c - a - b < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c - 2a - b < 0$ ე.ი. $\left.\begin{matrix}\Delta_1 < 0 \\ \cos^2\alpha \in (0;1)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta = \Delta_1 + \cos^2\alpha < 0$ ცხადია,

რომ Δ_1 მოდულით უფრო მეტია ვიდრე $\cos^2\alpha$. ე.ი. $\Delta < 0 \Rightarrow R_1 < 2R$ ე.ი.

$\triangle ABC$-ზე შემოხაზული წრეწირის R ω წრეწირის რადიუსის ორმაგზე ნაკლებია.

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	22.04.2012/ მათ/ II/

ამოცანა № 6 | გვერდი № 5

$a+b+c=1$ $a, b, c > 0$ და ამიტომ a, b და c $\in [0, 1]$

$$A=\frac{1}{a^2-2a+5}+\frac{1}{b^2-2b+5}+\frac{1}{c^2-2c+5}=\frac{1}{(a-1)^2+4}+\frac{1}{(b-1)^2+4}+\frac{1}{(c-1)^2+4}$$

[illegible]

$\frac{1}{4}$ [illegible] $a+b+c=1$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] $\frac{1}{2}$ [illegible] $a=0$ $b=\frac{1}{2}$ $c=\frac{1}{2}$ [illegible]

[illegible] A [illegible] $A_{min_1}=\frac{1}{(1-1)^2+4}+\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2+4}+$

$$+\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2+4}=\frac{1}{4}+\frac{4}{17}+\frac{4}{17}=\frac{1}{4}+\frac{8}{17}=\frac{49}{68}$$

[illegible] $a=0$ $b=0$ $c=1$

$A_{min_2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{13}{20}$ [illegible] $\frac{13}{20}<\frac{49}{68}$

და $A_{min}=\frac{13}{20}$ [illegible] $A_{min}=\frac{13}{20}$